Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Mayo 2003
MA-2112

Nombre: ______________________

Carnet: __________ Sección: ___

PRIMER PARCIAL- 7.30 am

1. (12 puntos) Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x - \frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) ¿Es f es continua en $(0,0)$?.

   b) Hallar las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

   c) ¿ Es f diferenciable en $(0,0)$?.

   Si es continua:
   a) Sea $\varepsilon > 0$,
   $|f(x,y) - f(0,0)| = |x - \frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2}| \leq |x| + |\frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2}| \leq |x| + |y||\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$.
   Si se toma $\sqrt{x^2+y^2} < \delta < \varepsilon/2 \Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$.

   b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim \frac{x}{x} = 1$
   $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim \frac{-y^3}{y^2} = 0$

   c) No es Diferenciable:
   $\lim \frac{|f(x,0)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   $= \lim \frac{|f(x,y)-x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim \frac{x^2y-y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$
   tome $y = kx$

   $\frac{|kx^3-k^3x^3|}{(x^2+k^2x^2)^{3/2}} = \frac{|k-k^3||x|^3}{|x|^3(1+k^2)^{3/2}} = \frac{k-k^3}{(1+k^2)^{3/2}} \nrightarrow 0$

2. (12 puntos)Dadas las superficies S_1 y S_2 definidas por las ecuaciones:
$S_1: \ x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$
$S_2: \ z = e^{x-y}$

y el punto $P = (1,1,1)$

a) Hallar una ecuación algebraica para el plano tangente a S_1 en P.

b) Hallar una representación vectorial de la recta que pasa por P y es tangente a la intersección de S_1 con S_2.

a) Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4$,
$\nabla f = (2x, 2y, 4z)$, $\nabla f(1,1,1) = (2,2,4)$,
plano tangente:
$\nabla f(1,1,1) * (x-1, y-1, z-1) = 0$, $(x-1) + (y-1) + 2(z-1) = 0$
La ecuación es: $x + y + 2z = 4$

b) El vector director de la recta que es tangente a $S_1 \bigcap S_2$ y pasa por P es :
$v = \nabla f(1,1,1) * g(1,1,1)$, donde $g(x,y,z) = z - e^{x-y}$,

$\nabla g(x,y,z) = (-e^{x-y}, e^{x-y}, 1)$, $\nabla g(1,1,1) = (-1,1,1)$

$$v = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
, $v = (-2,-6,4)$, pero $u = (-1,-3,2)$ también es director.

La ecuación paramétrica $P + tu$ con $t \in \mathbb{R}$:
$(1,1,1) + t(-1,-3,2) = (1-t, 1-3t, 1+2t)$.

3. (13 puntos) Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:
$f(x,y) = x^2 + y^2 - x^4 + 2y^4$

   a) Clasifique los puntos críticos de la función .

   b) Calcule máximos y mínimos globales de $f(x,y)$
   en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

a) $f_x = 2x - 8x^3 = 0 \Rightarrow x(1-4x^2) = 0$, se obtienen los valores: $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{-1}{2}$.
$f_y = 2y + 8y^3 = 0 \Rightarrow y(1+4y^2) = 0$, se obtiene $y = 0$.

Los puntos obtenidos son: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (\frac{1}{2}, 0)$, $P_3 = (\frac{-1}{2}, 0)$.
Calculando: $f_{xy} = 0$, $f_{xx} = 2 - 24x^2$, $f_{yy} = 2 + 24y^2$, $D = (2-24x^2)(2+24y^2)$.
i) $D(P_1) > 0$, $f_{xx}(P_1) > 0$, $P_1 = (0,0)$ mínimo.
ii) $D(P_2) < 0$, $P_2 = (\frac{1}{2}, 0)$ silla.
iii) $D(P_3) < 0$, $P_3 = (\frac{-1}{2}, 0)$ silla.

b) Usando Lagrange:
$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$
$\nabla f = \lambda \nabla g$
$2x - 8x^3 = 2\lambda x \Rightarrow x(1-4x^2) = \lambda x \Rightarrow (1-4x^2) = \lambda$ o $x = 0$
$2y + 8y^3 = 2\lambda y \Rightarrow y(1+4y^2) = \lambda y \Rightarrow (1+4y^2) = \lambda$ o $y = 0$.
Si $(1-4x^2) = (1+4y^2) \Rightarrow -x^2 = y^2$ no tiene solución real.

Los valores obtenidos son $x = 0$ y $y = 0$.
Si $x = 0$, usando g tenemos los puntos :$Q_1 = (0,1)$, $Q_2 = (0,-1)$.
Si $y = 0$, usando g tenemos los puntos :$Q_3 = (1,0)$, $Q_4 = (-1,0)$.
Evaluando en la función: $f(P_1) = 0$, $f(Q_1) = -1$, $f(Q_2) = -1$, $f(Q_3) = 3$, $f(Q_4) = 3$, entonces:
Q_1, Q_2 mínimos absolutos y Q_3, Q_4 máximos absolutos.

4. (12 puntos)Se sabe que la ecuación: $y^2 - xz - 2 - \cos z = 0$, define a z como función implícita y diferenciable con respecto a x, y. Calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ en el punto $(0, \sqrt{2}, \pi/2)$